Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 18/01/2021

1) Determinare $\sup(A)$, $\inf(A)$ e, se esistono, $\min(A)$ e $\max(A)$ dell'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n^2+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

2) Determinare, se esistono, i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3} .$$

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \log(x+2)$$

e calcolarne la derivata prima.

4) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x)\, dx .$$

Soluzione

1) I primi elementi dell'insieme sono

$$A = \{1, 5/3, 5/2, 17/5, 13/3, \ldots\} \ .$$

Si può verificare che risulta

$$\inf(A) = \min(A) = 1 \ , \qquad \sup(A) = +\infty \ .$$

L'insieme A non ha massimo.

2) L'insieme di definizione della funzione è

$$D =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$$

Risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2}$$

che si annulla per $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Dal segno della derivata prima si deduce che $x = -3 - 2\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo mentre $x = -3 + 2\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo. La funzione non risulta limitata inferiormente e neppure superiormente.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x + 1 \neq 0$, $x + 2 > 0$. Si ha quindi

$$D =]-2, -1[\cup]-1, +\infty[\ .$$

Si ha

$$f'(x) \ = \ e^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \log(x+2) + \frac{1}{x+2} \right)$$

4) Integrando per parti risulta

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin(x) \, dx &= [-x \cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx \\ &= [-x \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$